b- $\forall n \in IN;\ x_{n+1} - x_n = -\dfrac{h(x_n)}{h'(x_n)} > 0$

car $x_n \in]Log2, \alpha[\subset]Log2, 1[$ donc $h(x_n) > 0$ et $h'(x_n) < 0$

Par suite la suite (x_n) est croissante sur IN.

De plus (x_n) est majorée par α D'ou (x_n) converge.

$\otimes$ posons $L = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Désignons par H la fonction qui à $x \mapsto x - \dfrac{h(x)}{h'(x)}$, $\forall x \in [Log2, \alpha]$

Comme h' est continue et non nul sur $[Log2, \alpha]$ alors H êst continue sur $[Log2, \alpha]$.

$\oplus$ $\forall n \in IN$ on a $x_n \in]Log2, \alpha[\Rightarrow \left(L = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n\right) \in [Log2, \alpha]$.

D'où H est continue en L.

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+1} = H(x_n) \\ (x_n) \text{ converge vers L} \\ \text{H est continue en L} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{L est solution de l'équation } H(x)=x$$

$\cdot\ H(x) = x \Leftrightarrow x - \dfrac{h(x)}{h'(x)} = x \Leftrightarrow \dfrac{h(x)}{h'(x)} = 0$

$\Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x = \alpha}$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$.

4)a- pour $n \in IN$

$x_n \in]Log2, \alpha[$ **et** $x_{n+1} = x_n - \dfrac{h(x_n)}{h'(x_n)}$

$\Rightarrow \exists c_n \in]x_n, \alpha[$ tel que $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{(\alpha - x_n)^2 h''(c_n)}{2h'(x_n)}$ (d'après **C-2/b-**)

$\Leftrightarrow \exists c_n \in]x_n, \alpha[$ tel que $x_{n+1} - \alpha = \dfrac{h''(c_n)}{2h'(x_n)}(x_n - \alpha)^2$.

b- $\star$ d'après **C-1/** on a $\forall x \in]Log2, 1[\ ;\ h''(x) > 0$

$\Rightarrow h'$ est croissante sur $[Log2, 1]$.

$\cdot\ \forall x \in]Log2, 1[\ ;\ h'''(x) = (2e^{-x} - 4e^{-2x})' = -2e^{-x} + 8e^{-2x}$

$= -2e^{-x}(1 - 4e^{-x})$

$\cdot\ Log2 < x < 1 \Leftrightarrow -1 < -x < Log\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow e^{-1} < e^{-x} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -2 < -4e^{-x} < -4e^{-1}$

$\Leftrightarrow -1 < 1 - 4e^{-x} < 1 - 4e^{-1} \approx -0,47$

Or $1 - 4e^{-x} \leq 0$ donc $h'''(x) \geq 0 \Rightarrow h''$ est croissante sur $[Log2, 1]$

$\cdot Log2 < c_n < 1 \Rightarrow h''(Log2) < h''(c_n) < h''(1)$

(car h'' $\nearrow$ sur $[Log2, 1]$)

$\Leftrightarrow 0 = 2e^{-\ln 2} - 4e^{-2\ln 2} < h''(c_n) < 2e^{-1} - 4e^{-2} \approx 0,19$